



Le système de Lorenz

Mateusz Brylski, Zoé Lelouch-Roumagnac,
Nathan Rodrigues, Leonardo Vasilev
Licence de Mathématiques
Sorbonne Université

10 mai 2026

Résumé

Ce rapport présente le projet de recherche proposé aux étudiants de troisième année de licence de mathématiques par Sorbonne Université dans le cadre du module LU3MA201 et encadré par la professeure Anne-Laure Dalibard. Le sujet de ce projet est le célèbre système de Lorenz, pour lequel nous analyserons formellement les solutions, les points d'équilibre et leur stabilité, ainsi que les bifurcations. Nous compléterons notre étude par des solutions numériques afin d'observer visuellement la nature chaotique de ce système et l'existence d'un attracteur.

Table des matières

1	Introduction et Formulation du système	4
1.1	Formulation du problème	4
1.1.1	Les forces internes et le nombre de Rayleigh	5
1.1.2	Les équations de Navier-Stokes et de diffusion thermique	6
1.2	Projection de Lorenz	8
2	Solutions	9
2.1	Les solutions locales	10
2.2	Les solutions globales	12
3	Points d'équilibre et leurs stabilités	12
3.1	L'existence de points d'équilibre	12
3.2	Stabilité de l'origine	13
3.3	Stabilité de $C_{\pm}$	15
4	Bifurcations	19
4.1	Bifurcation en fourche (Pitchfork)	19
4.1.1	Application au système de Lorenz	21
4.2	Bifurcation de Hopf	23
4.3	Portraits de phase sur python	24
4.3.1	Code	26
5	Existence de l'Attracteur de Lorenz	27
5.1	Idée de preuve	27
5.2	Modèle simplifié	28
6	Analyse numérique et modélisation du système de Lorenz	32
6.1	Méthode d'Euler Explicite	32
6.2	Méthode de Runge-Kutta (Ordre 4)	33
6.3	Comparaison et Erreur	36
6.4	Visualisation de la bifurcation de Hopf avec la méthode de Runge-Kutta 4	37
7	Programmation	38
7.1	Le logiciel et les bibliothèques utilisées	38
7.2	Les codes	39

8	Annexes	44
8.1	Calcul de ansatz de Lorenz	44

1 Introduction et Formulation du système

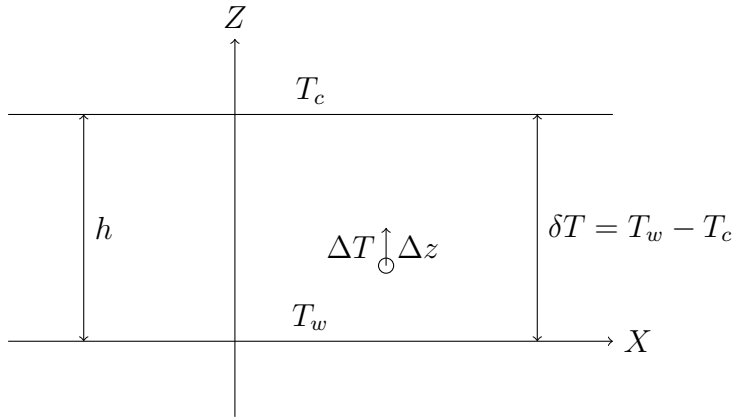
Ce modèle a été proposé en 1963 par Edward Lorenz, Ellen Fetter et Margaret Hamilton pour décrire, dans un contexte idéal, la convection atmosphérique. Il s'agit d'un système composé de trois équations différentielles. Cette forme dérive des équations de Navier-Stokes et de l'équation de la chaleur.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

Malgré sa simplicité apparente, ce modèle révèle un comportement extrêmement complexe et imprévisible, caractérisé par une forte sensibilité aux conditions initiales, phénomène connu sous le nom d'effet papillon. Ce système a profondément influencé la compréhension des phénomènes dynamiques dans de nombreux domaines scientifiques.

1.1 Formulation du problème

La forme finale est assez difficile à obtenir, mais le problème de base est très simple et idéal. Ce graphique constitue la base de la construction, laquelle n'est pas rigoureuse d'un point de vue mathématique.



Commençons par poser le contexte : nous nous intéressons à une piscine imaginaire remplie d'un liquide incompressible. Cette piscine a une hauteur h et ce système présente une différence de température entre la température du fond T_w à $Z = 0$ et la température de la surface T_c à $Z = h$, notée

$\delta T = T_w - T_c$. Le fond est plus chaud que la surface, c'est-à-dire que $\delta T > 0$. On suppose qu'au début ($t = 0$) notre liquide est parfaitement immobile. Notre objectif est de prédire le déplacement de chaque petite parcelle de liquide.

1.1.1 Les forces internes et le nombre de Rayleigh

On considère une petite parcelle de liquide se déplaçant vers la surface sur une distance Δz . On peut approximer la variation de température par $\Delta T = \frac{\delta T}{h} \Delta z$.

On applique tout d'abord l'équation de diffusion thermique pour calculer la variation locale de la température. Cette équation indique que la variation temporelle de la température dépend uniquement de la constante de diffusion thermique et du laplacien de la température. Ce laplacien peut être approximé de la manière suivante :

$$\frac{dT}{dt} = D_T \nabla^2 T \approx D_T \frac{\delta T}{h^2} \frac{\Delta z}{h}$$

Définissons à présent le temps caractéristique de diffusion nécessaire pour que la variation de chaleur ΔT se produise, c'est-à-dire δt_T tel que :

$$\delta t_T \frac{dT}{dt} = \Delta T \implies \delta t_T = \frac{h^2}{D_T}$$

Localement, deux forces s'exercent sur notre parcelle. La première est la poussée d'Archimède, qui résulte de la différence de densité entre la parcelle et le fluide environnant, elle-même due à la différence de température. Celle-ci est facile à calculer, car elle dépend de la différence de densité entre les liquides, qui est proportionnelle à la différence de température :

$$F_p = \alpha \rho_0 g \Delta T = \alpha \rho_0 g \frac{\delta T}{h} \Delta z$$

où α est le coefficient d'expansion thermique, g le coefficient de la gravité et ρ_0 la densité initiale de notre parcelle. La deuxième force est la traînée, qui compense la vitesse de la parcelle. Sans elle, la parcelle accélérerait indéfiniment vers $z = h$. On suppose donc que les deux s'annulent et que notre parcelle se déplace avec une vitesse constante égale à $v_z = \frac{\Delta z}{t_d}$, où t_d est le

temps de déplacement. La traînée visqueuse dans le cas d'un solide en mouvement dans un fluide a été décrite par Newton. Dans notre cas, le fluide étant incompressible et la parcelle étant de petite taille, cette expression se simplifie considérablement et ne dépend que du laplacien de la vitesse, que l'on peut approximer à notre échelle locale :

$$F_v = \mu \nabla^2 v_z \approx \mu \frac{v_z}{h^2}$$

d'où on dérive :

$$v_z = \frac{\alpha \rho_0 g h \delta T}{\mu}; \quad t_d = \frac{\mu}{\alpha \rho_0 g h \delta T}$$

Le calcul précédent nous permet de définir une constante fondamentale : le rapport entre le temps caractéristique de diffusion thermique et le temps de déplacement de la parcelle. Nous l'appelons le nombre de Rayleigh :

$$R := \frac{\delta t_T}{t_d} = \frac{\alpha \rho_0 g h^3 \delta T}{D_T \mu}$$

1.1.2 Les équations de Navier-Stokes et de diffusion thermique

On commence la formulation de notre système en définissant la température comme une fonction $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et en rappelant l'équation de diffusion thermique dans un écoulement incompressible :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = D_T \nabla^2 T \quad (1)$$

où $\vec{v} = (v_x, v_z)$ en t et $\nabla T = (\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial z})$. Dans le cas idéal, on a $T(x, z, t) = T_w - \frac{z}{h} \delta T$. On s'intéresse donc à l'écart par rapport à ce profil idéal, et l'on établit l'équation réduite que satisfait cette perturbation.

$$\tau(x, z, t) := T(x, z, t) - T_w + \frac{z}{h} \delta T; \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \tau - v_z \frac{\delta T}{h} = D_T \nabla^2 \tau$$

Cette définition sera utile pour exprimer la densité du fluide, qui ne dépend que de la température. On applique la formule de Taylor :

$$\rho(T) = \rho(T_w) + \frac{\partial \rho}{\partial T}(T - T_w) + \dots \approx \rho_0 - \alpha \rho_0 \left(\tau(x, y, z) - \frac{z}{h} \delta T \right)$$

où $\alpha = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ est par définition la constante de dilatation thermique. Les équations de Navier-Stokes pour la vitesse en x et en z (où $\rho = \rho(T)$ et p désignent la pression) :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla v_z = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z \\ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x \end{cases} \quad (2)$$

Nous simplifions ici l'équation pour v_z en substituant l'expression de ρ et en appliquant l'approximation de Boussinesq, qui permet de négliger les variations de densité sauf dans les termes couplés à la gravité.

$$\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho_0 \vec{v} \cdot \nabla v_z = -\rho_0 g - \alpha \rho_0 \frac{z}{h} \delta T - \frac{\partial p}{\partial z} + \alpha g \rho_0 \tau + \mu \nabla^2 v_z$$

Nous introduisons à présent de nouvelles variables qui permettront de réduire encore notre système :

$$p' = p + \rho_0 g z + \alpha \rho_0 \frac{z^2}{2} \frac{\delta T}{h}; \quad t' = \frac{D_T t}{h^2}; \quad x' = \frac{x}{h}; \quad z' = \frac{z}{h}; \quad \tau'(x', z', t') = \frac{1}{h} \tau(x, z, t)$$

De plus, nous introduisons les deux constantes et la variable suivantes :

$$\nu := \frac{\mu}{\rho_0}; \quad \sigma := \frac{\mu}{\rho_0 D_T}; \quad \Pi = p' \frac{h^2}{\mu D_T}$$

Avec ces nouvelles notations, les équations (1) et (2) se réécrivent :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial v'_z}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \nabla v'_z \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial z'} + R \tau' + \nabla^2 v'_z \\ \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial v'_x}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \nabla v'_x \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x'} + \nabla^2 v'_x \\ \frac{\partial \tau'}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \nabla \tau' - v'_z = \nabla^2 \tau' \end{cases} \quad (3)$$

Le système obtenu décrit le problème original et, ce qui est le plus important, il ne dépend pas du choix des unités. Comme il s'agit d'un système purement mathématique, nous pouvons encoder toutes les informations relatives aux déplacements (vitesses) de manière encore plus compacte. Soit $\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^4 définie par $\vec{v} = (v_x, v_z) = \left(-\frac{\partial \xi}{\partial z}, \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$ pour tout $(x, z, t) \in \mathbb{R}^3$. À l'aide de cette fonction, on peut réécrire (3) comme suit (à partir de maintenant, on n'écrit plus les $'$) :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial x} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + R \tau + \nabla^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{1}{\sigma} \left(-\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial x} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \nabla^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial x} = \nabla^2 \tau \end{cases}$$

En dérivant par rapport à x la première égalité et en soustrayant la dérivée par rapport à z de la deuxième égalité, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \xi - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \right] = R \frac{\partial \tau}{\partial x} + \nabla^4 \xi \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial x} = \nabla^2 \tau \end{cases} \quad (4)$$

La solution de ce système ne perd pas d'information sur le comportement du fluide. Nous avons bien réduit notre problème à la recherche de fonctions ξ et τ satisfaisant (4).

1.2 Projection de Lorenz

Il est bien connu que la résolution des équations (4) est très difficile, et qu'il n'est pas judicieux de manipuler ces fonctions dans toute leur généralité. L'idée de Lorenz consiste à ne retenir qu'un nombre fini de modes de Fourier, ce qui constitue une approximation très grossière du problème initial. Il retient un seul mode de Fourier pour la fonction ξ , et deux pour la température (selon les directions x et z). De plus, des conditions aux bords s'imposent sur les parois de notre domaine : la variation de température τ est nulle sur le fond et la surface, et sur les bords il n'y a pas d'accélération selon X :

$$\tau|_{\{Z=0\} \cup \{Z=1\}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z}|_{\{Z=0\} \cup \{Z=1\}} = 0$$

Jusqu'à présent, nous avons effectué une réduction du système sans en altérer la complexité. Nous substituons à présent les fonctions ξ et τ par des fonctions spécifiques satisfaisant les conditions aux bords, en les projetant sur un et deux modes de Fourier respectivement.

$$\tau(x, z, t) = T_1(t) \sin(\pi z) \cos(ax) - T_2(t) \sin(2\pi z) \quad \xi(x, z, t) = \Xi(t) \sin(\pi z) \sin(ax) \quad (5)$$

où a est un réel que l'on substitue en fonction du système spécifique analysé. Il suffit alors de substituer les dérivées partielles de nos nouvelles variables dans (4). Le calcul est relativement direct et ne présente pas d'intérêt particulier

en lui-même ; il est donc reporté en annexe. Le système obtenu est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a\pi}{(\pi^2+a^2)\sqrt{2}} \Xi(t) \right) = \sigma \left[\frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3 \sqrt{2}} T_1(t) - \frac{a\pi}{(\pi^2+a^2)\sqrt{2}} \Xi(t) \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3 \sqrt{2}} T_1(t) \right) = \frac{a^2 R}{(\pi^2+a^2)^3} \left(\frac{a\pi}{(\pi^2+a^2)\sqrt{2}} \Xi(t) \right) \\ \quad - \frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3 \sqrt{2}} T_1(t) - \frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3} T_2(t) \cdot \frac{a\pi}{(\pi^2+a^2)\sqrt{2}} \Xi(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3 \sqrt{2}} T_2(t) \right) = \frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3 \sqrt{2}} T_1(t) \cdot \frac{a\pi}{(\pi^2+a^2)\sqrt{2}} \Xi(t) - \frac{4\pi^2}{\pi^2+a^2} \cdot \frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3} T_2(t) \end{cases}$$

Posons la notation finale :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a\pi}{(\pi^2+a^2)\sqrt{2}} \Xi(t) & y(t) &= \frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3 \sqrt{2}} T_1(t) & z(t) &= \frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3} T_2(t) \\ \rho &= \frac{a^2 R}{(\pi^2+a^2)^3} & \beta &= \frac{4\pi^2}{\pi^2+a^2} \end{aligned}$$

ce qui nous ramène au système final voulu :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (\text{E})$$

2 Solutions

Commençons l'analyse purement mathématique du système de Lorenz. Étant donnés $\sigma, \rho, \beta > 0$, on s'intéresse à la solution du système $\dot{X}(t) = F(X(t))$ pour la fonction :

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ x(\rho - z) - y \\ xy - \beta z \end{pmatrix}$$

avec le point de départ en $t = 0$ et $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Dans cette section, nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème 1. *Pour tout $\sigma, \rho, \beta > 0$ et pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^3$, le système d'équations différentielles ordinaires :*

$$X(0) = x_0 \quad \dot{X}(t) = F(X(t)) \quad (\text{SL})$$

admet une solution globale sur $\mathbb{R}_+$.

À l'aide de deux lemmes :

Lemme 2. *Pour tout $\sigma, \rho, \beta > 0$ et pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^3$, le système d'équations différentielles ordinaires :*

$$X(0) = x_0 \quad \dot{X}(t) = F(X(t))$$

admet une solution sur $[0, T]$ pour un certain T tel que $0 < T < +\infty$.

Lemme 3. *Si le système d'équations différentielles ordinaires :*

$$X(0) = x_0 \quad \dot{X}(t) = F(X(t))$$

admet une solution maximale sur $[0, T^[$ avec $T^* < +\infty$, alors $\limsup_{t \rightarrow T^*} \|X(t)\| = +\infty$.*

2.1 Les solutions locales

Preuve de 2. Montrons que (SL) admet une solution locale. Fixons $C > 0$, $X_0 \in \mathbb{R}^3$ un point de départ, et $U := \bar{B}(X_0, C) \subset \mathbb{R}^3$ une boule fermée (qui est un compact). F , étant de classe C^1 , est lipschitzienne et bornée sur U . Définissons :

$$M := \sup_{X \in U} \|F(X)\| \quad K := \sup_{X, Y \in U; X \neq Y} \frac{\|F(X) - F(Y)\|}{\|X - Y\|}$$

et le domaine de la solution locale bien choisi $[0, T[$ où $T = \min \left\{ \frac{C}{M}, \frac{1}{2K} \right\} > 0$. Construisons une suite de fonctions définie par récurrence :

$$\forall_{t \in [0, T[, n \in \mathbb{N}} \quad X^0(t) = X_0 \quad \text{et} \quad X^{n+1}(t) = X_0 + \int_0^t F(X^n(s)) ds$$

Cette suite est bien définie et reste dans la boule U , car par récurrence $X^0 \in U$ et

$$\begin{aligned} \forall_{t \in [0, T[, n \in \mathbb{N}} \|X^{n+1}(t) - X_0\| &= \left\| \int_0^t F(X^n(s)) ds \right\| \leq \int_0^t \|F(X^n(s))\| ds \\ &\leq \int_0^t \sup_{X \in U} \|F(X)\| ds \leq Mt \leq MT \leq C \end{aligned}$$

Cette remarque sera utile pour estimer $\sup_{t \in [0, T[} \|X^{n+1}(t) - X^n(t)\|$. Soit $t \in [0, T[$:

$$\begin{aligned} \|X^{n+1}(t) - X^n(t)\| &= \left\| \int_0^t F(X^n(s)) - F(X^{n-1}(s)) ds \right\| \leq K \int_0^t \|X^n(s) - X^{n-1}(s)\| ds \\ &\leq KT \sup_{t \in [0, T[} \|X^n(t) - X^{n-1}(t)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in [0, T[} \|X^n(t) - X^{n-1}(t)\| \end{aligned}$$

En itérant cette inégalité n fois et en prenant le supremum sur $[0, T[$:

$$\sup_{t \in [0, T[} \|X^{n+1}(t) - X^n(t)\| \leq \frac{1}{2^n} \sup_{t \in [0, T[} \|X^1(t) - X^0(t)\| \leq \frac{C}{2^n}$$

Cette majoration nous permet de conclure que la série de fonctions $\left(\sum_{n=0}^N (X^{n+1} - X^n)\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge normalement sur $[0, T[$. La limite de cette série est donc continue et constitue la solution cherchée de (SL) :

$$X(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(X_0 + \sum_{n=0}^N X^{n+1}(t) - X^n(t) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} X^N(t)$$

F étant continue et la série convergeant normalement, on peut intervertir limite et intégrale par le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned} X(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} X^N(t) = X_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t F(X^{N-1}(s)) ds = X_0 + \int_0^t \lim_{N \rightarrow \infty} F(X^{N-1}(s)) ds \\ &= X_0 + \int_0^t F\left(\lim_{N \rightarrow \infty} X^{N-1}(s)\right) ds = X_0 + \int_0^t F(X(s)) ds \end{aligned}$$

On obtient ainsi une solution sur $[0, T[$ telle que $X(0) = x_0$ et $\dot{X}(t) = F(X(t))$.

□

Preuve de 3. Montrons ce lemme par l'absurde. Supposons que $R := \sup_{t \in [0, T^*[} \|X(t)\|$ soit fini. La fonction F étant polynomiale, elle est continue et donc bornée sur la boule $B(0, R) \subset \mathbb{R}^3$. Définissons $C := \sup_{\|x\| \leq R} \|F(x)\| < \infty$; cela donne en particulier que $\sup_{t \in [0, T^*[} \|\dot{X}(t)\| < C$. Considérons une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, T^*[$ telle que $t_n \rightarrow T^*$; on en déduit une suite $(X(t_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$. La suite $(X(t_n))$ est de Cauchy car

$$\|X(t_n) - X(t_m)\| < C|t_n - t_m| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

L'espace $\mathbb{R}^3$ étant complet et la suite étant bornée par R , il existe un point $\bar{X} \in \mathbb{R}^3$ tel que $X(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \bar{X}$. De plus, cette limite est indépendante du choix de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui permet de conclure que $X(t) \rightarrow \bar{X}$ lorsque $t \rightarrow T^*$. On peut alors prolonger la solution à $[0, T^*]$, puis au-delà par le Lemme 2, ce qui contredit la maximalité de T^* . $\square$

2.2 Les solutions globales

Preuve de 1. D'après le Lemme 2, il existe une solution sur $[0, T[$ pour un certain $T > 0$. Nous allons majorer $\|X(t)\|^2$ sur $[0, T[$. Calculons la dérivée de $\|X(t)\|^2$ en substituant l'expression de F (on omet la dépendance en t pour alléger la notation) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|X(t)\|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} (x^2 + y^2 + z^2) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} \\ &= 2x(\sigma(y - x)) + 2y(x(\rho - z) - y) + 2z(xy - \beta z) \\ &= -2\sigma x^2 - 2y^2 - 2\beta z^2 + 2\sigma xy + 2\rho xy + 2xyz - 2xyz \\ &\leq (\rho + \sigma)2xy \leq (\rho + \sigma)(x^2 + y^2) \leq (\rho + \sigma)\|X(t)\|^2 \end{aligned}$$

Ces inégalités découlent du fait que $\sigma, \beta > 0$, $x^2, y^2, z^2 \geq 0$, et que $(x - y)^2 \geq 0$ implique $x^2 + y^2 \geq 2xy$. L'inégalité $\frac{\partial}{\partial t} \|X(t)\|^2 \leq (\rho + \sigma)\|X(t)\|^2$ nous permet d'appliquer le lemme de Grönwall, ce qui donne :

$$\|X(t)\|^2 \leq \|X_0\|^2 \exp(t(\rho + \sigma)) \implies \|X(t)\| \leq \sqrt{\|X_0\|^2 \exp(T(\rho + \sigma))} < \infty$$

D'après le Lemme 3, si $[0, T^*[$ était le domaine maximal avec $T^* < \infty$, on aurait $\limsup_{t \rightarrow T^*} \|X(t)\| = +\infty$. La majoration obtenue contredit cette conclusion, ce qui permet de conclure que la solution est globale, définie sur $\mathbb{R}_+$. $\square$

3 Points d'équilibre et leurs stabilités

Dans cette section, nous analysons de façon élémentaire les points d'équilibre du système (SL) et leur stabilité.

3.1 L'existence de points d'équilibre

$X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ est appelé point d'équilibre si la solution du système (SL) partant de $X(0) = X_0$ est constante en temps, c'est-à-dire

$X(t) = X_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. En particulier, on a $\dot{X}(t) = 0$, ce qui signifie que X_0 est une racine de F .

$$\begin{aligned} F(X_0) = 0 &\iff \begin{cases} \sigma(y_0 - x_0) = 0 \\ x_0(\rho - z_0) - y_0 = 0 \\ x_0 y_0 - \beta z_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_0 = x_0 \\ x_0 \rho - x_0 z_0 - y_0 = 0 \\ z_0 = \frac{x_0 y_0}{\beta} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_0 = x_0 \\ x_0 \left((\rho - 1) - \frac{x_0^2}{\beta} \right) = 0 \\ z_0 = \frac{x_0^2}{\beta} \end{cases} \end{aligned}$$

On distingue alors les cas $x_0 = 0$ et $x_0 \neq 0$, en ne retenant que les solutions réelles :

$$\begin{aligned} F(X_0) = 0 &\iff \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = x_0 \\ x_0 \left((\rho - 1) - \frac{x_0^2}{\beta} \right) = 0 \\ z_0 = \frac{x_0^2}{\beta} \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ y_0 = x_0 \\ x_0 \left((\rho - 1) - \frac{x_0^2}{\beta} \right) = 0 \\ z_0 = \frac{x_0^2}{\beta} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ y_0 = x_0 \\ \frac{x_0^2}{\beta} = \rho - 1 \\ z_0 = \frac{x_0^2}{\beta} \end{cases} \\ &\iff X_0 = \bar{0} \quad \vee \quad \begin{cases} x_0 \neq 0; \rho > 1 \\ y_0 = x_0 = \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ z_0 = \rho - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, il n'existe qu'un seul point d'équilibre, $(0, 0, 0)$, lorsque $\rho \leq 1$, et il en existe trois lorsque $\rho > 1$: $(0, 0, 0)$, $C_+ := (\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$ et $C_- := (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$.

3.2 Stabilité de l'origine

Nous étudions ici le cas $X_0 = (0, 0, 0)$. Le point d'équilibre est dit stable s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\|X(0) - X_0\| < \epsilon$ implique $X(t) \rightarrow X_0$ quand

$t \rightarrow +\infty$. L'analyse de stabilité est difficile pour les systèmes non linéaires comme (SL) . Heureusement, nous pouvons l'établir à l'aide du théorème de Hartman-Grobman.

Théorème 4 (Théorème de Hartman-Grobman). *Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ possédant un zéro p , et A la matrice jacobienne de f au point p . On suppose que p est un point d'équilibre hyperbolique, c'est-à-dire qu'aucune valeur propre de A n'a sa partie réelle nulle. Alors, il existe deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ contenant respectivement p et 0 , et un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ tel que $h(p) = 0$ et qui envoie les trajectoires de $x'(t) = f(x(t))$ bijectivement sur les trajectoires de $y'(t) = Ay(t)$ dans $V = h(U)$ en préservant l'orientation donnée par le temps t .*

Ce théorème bien connu a été démontré dans les années soixante par Philip Hartman et David M. Grobman. On trouve l'une des premières versions de cette preuve dans [8].

Considérons le système linéarisé $\dot{X}(t) = DF_{(0,0,0)}X(t)$, où $DF_{(0,0,0)} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ désigne la différentielle de F en l'origine, calculée de la façon suivante :

$$DF_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

Pour comprendre le comportement de $X(t)$, on s'intéresse à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|X(t) - X_0\|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} \|X(t)\|^2 = \frac{\partial}{\partial t} (x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2) \\ &= 2(x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) + z(t)\dot{z}(t)) = 2X(t) \cdot \dot{X}(t) = 2X(t) \cdot DF_{(0,0,0)}X(t) \end{aligned}$$

L'une des propriétés fondamentales de l'algèbre linéaire est que le produit scalaire est invariant par changement de base orthonormée ; en particulier, si $DF_{(0,0,0)}$ admet des valeurs propres réelles, on peut se placer dans la base de ses vecteurs propres. En exprimant le système $\dot{X}'(t) = (\dot{x}'(t), \dot{y}'(t), \dot{z}'(t)) = DF_{(0,0,0)}(x'(t), y'(t), z'(t)) = (\lambda_1 x'(t), \lambda_2 y'(t), \lambda_3 z'(t))$ dans cette nouvelle base associée aux valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \|X(t) - X_0\|^2 = 2X'(t) \cdot DF_{(0,0,0)}X'(t) = \lambda_1 x'(t)^2 + \lambda_2 y'(t)^2 + \lambda_3 z'(t)^2$$

La solution tend donc vers X_0 si et seulement si $\lambda_1 x'(t)^2 + \lambda_2 y'(t)^2 + \lambda_3 z'(t)^2 < 0$, ce qui est équivalent à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$. Calculons le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \det(DF_{(0,0,0)} - \lambda \text{Id}_3) &= \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ \rho & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\beta - \lambda \end{vmatrix} = (-\beta - \lambda) \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma \\ \rho & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\beta - \lambda)(\lambda^2 + \lambda(1 + \sigma) + (\sigma - \sigma\rho)) \\ &= -(\lambda - (-\beta)) \left(\lambda - \frac{-1 - \sigma + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho}}{2} \right) \left(\lambda - \frac{-1 - \sigma - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho}}{2} \right) \end{aligned}$$

Les valeurs propres $\lambda_1 := -\beta$ et $\lambda_2 := \frac{-1 - \sigma - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho}}{2}$ sont bien négatives. Quant à $\lambda_3 := \frac{-1 - \sigma + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho}}{2}$, elle est négative si et seulement si :

$$\frac{-1 - \sigma + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho}}{2} < 0 \iff (1 + \sigma)^2 > (\sigma - 1)^2 + 4\sigma\rho \iff 4\sigma > 4\sigma\rho \iff 1 > \rho$$

En conclusion, l'origine est stable si et seulement si $\rho < 1$.

3.3 Stabilité de $C_\pm$

On traite simultanément les deux cas $X_0 = C_\pm$, avec $\rho > 1$. On calcule le polynôme caractéristique de $DF_{C_\pm}$ — on vérifiera qu'il est le même pour C_+ et C_- :

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) = \det(DF_{C_\pm} - \lambda \text{Id}_3) &= \begin{vmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & \mp \sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)} & \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)} & -\beta - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\sigma - \lambda) \begin{vmatrix} -1 - \lambda & \mp \sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)} & -\beta - \lambda \end{vmatrix} - \sigma \begin{vmatrix} 1 & \mp \sqrt{\beta(\rho - 1)} \\ \pm \sqrt{\beta(\rho - 1)} & -\beta - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\sigma - \lambda)((1 + \lambda)(\beta + \lambda) + \beta(\rho - 1)) - \sigma(-\beta - \lambda + \beta(\rho - 1)) \\ &= -(\lambda^3 + \lambda^2(\sigma + \beta + 1) + \lambda\beta(\sigma + \rho) + 2\beta\sigma(\rho - 1)) \end{aligned}$$

Le coefficient dominant est non nul et le degré est impair, donc χ admet au moins une racine réelle. Les racines de ce polynôme se répartissent donc en deux cas, que l'on traite séparément :

Cas 1 : Les trois racines sont réelles. Ce cas est immédiat : les coefficients de $-\chi(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(\sigma + \beta + 1) + \lambda\beta(\sigma + \rho) + 2\beta\sigma(\rho - 1)$ sont tous positifs puisque $\beta, \sigma > 0$ et $\rho > 1$. Par conséquent, toutes les racines réelles doivent être négatives. Ainsi, $C_{\pm}$ sont stables. Ce cas s'applique notamment lorsque ρ est proche de 1. À mesure que ρ augmente, il existe un seuil au-delà duquel le polynôme admet des racines complexes, correspondant au Cas 2. Ce point critique est difficile à calculer explicitement, car il correspond aux racines d'un polynôme de degré trois en ρ , obtenu comme discriminant de χ :

$$\begin{aligned}\Delta(\rho) = & -4\beta^3\rho^3 + (\beta^2(\sigma + \beta + 1)^2 - 12\sigma\beta^3 + 36\sigma\beta^2(\sigma + \beta + 1) - 108\sigma^2\beta^2)\rho^2 \\ & + (2\sigma\beta^2(\sigma + \beta + 1)^2 - 12\sigma^2\beta^3 - 8\sigma\beta(\sigma + \beta + 1)^3 + 18\sigma\beta^2(\sigma + \beta + 1)(\sigma - 2) + 216\sigma^2\beta^2)\rho \\ & + (\sigma^2\beta^2(\sigma + \beta + 1)^2 - 4\sigma^3\beta^3 + 8\sigma\beta(\sigma + \beta + 1)^3 - 36\sigma^2\beta^2(\sigma + \beta + 1) - 108\sigma^2\beta^2)\end{aligned}$$

On ne peut rien garantir en général sur la relation entre ce point de passage et le point de bifurcation ρ^* que l'on calculera ; mais on sait que dans le cas standard, avec $\sigma = 10$, $\rho = 28$ et $\beta = \frac{8}{3}$, ce point est inférieur à ρ^* .

Cas 2 : Une racine réelle et deux racines complexes. Dans ce cas, on dispose d'une racine réelle négative $\lambda^* \in \mathbb{R}_-$ et de deux racines complexes conjuguées $a + ib$ et $a - ib$. En présence de valeurs propres complexes, les solutions s'écrivent dans la base de vecteurs propres :

$$\begin{aligned}\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda^* t} \\ y(t) = y_0 e^{at} \cos bt + z_0 e^{at} \sin bt \\ z(t) = -y_0 e^{at} \sin bt + z_0 e^{at} \cos bt \end{cases} & \implies \begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda^* x(t) \\ \dot{y}(t) = ay(t) + bz(t) \\ \dot{z}(t) = az(t) - by(t) \end{cases} \\ \implies \frac{\partial}{\partial t} \|X(t) - X_0\|^2 = 2X(t) \cdot DF_{C_{\pm}} X(t) \\ = 2(\lambda^* x(t)^2 + y(t)(ay(t) + bz(t)) + z(t)(az(t) - by(t))) \\ = 2(\lambda^* x(t)^2 + ay(t)^2 + az(t)^2)\end{aligned}$$

La stabilité de $C_{\pm}$ dépend donc uniquement du signe de a . On factorise le polynôme sous la forme :

$$\begin{aligned}-\chi(x) &= (x - \lambda^*)(x - a - ib)(x - a + ib) = (x - \lambda^*)(x^2 - 2ax + a^2 + b^2) \\ &= x^3 + (-\lambda^* - 2a)x^2 + (a^2 + b^2 + 2a\lambda^*)x + (-\lambda^*(a^2 + b^2))\end{aligned}$$

Par identification des coefficients dans $\mathbb{R}[X]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} -\lambda^* - 2a = \sigma + \beta + 1 \\ a^2 + b^2 + 2a\lambda^* = \beta(\sigma + \rho) \\ -\lambda^*(a^2 + b^2) = 2\beta\sigma(\rho - 1) \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda^* = 2a - \sigma - \beta - 1 \\ a^2 + b^2 + 2a(2a - \sigma - \beta - 1) = \beta(\sigma + \rho) \\ -(2a - \sigma - \beta - 1)(a^2 + b^2) = 2\beta\sigma(\rho - 1) \end{cases} \\
& \implies \begin{cases} a^2 + b^2 = \beta(\sigma + \rho) - 2a(2a - \sigma - \beta - 1) \\ -(2a - \sigma - \beta - 1)(\beta(\sigma + \rho) - 2a(2a - \sigma - \beta - 1)) = 2\beta\sigma(\rho - 1) \end{cases} \implies \\
& 0 = 8a^3 + a^2(8(1 + \beta + \sigma)) + a(2(\beta(\sigma + \rho) + (1 + \beta + \sigma)^2) + \beta(\sigma(3 + \beta + \sigma) - \rho(\sigma - \beta - 1)))
\end{aligned}$$

On remarque que les trois premiers coefficients sont positifs. Par le même raisonnement qu'au Cas 1, les racines réelles de ce polynôme sont négatives dès que son terme constant est positif. Posons :

$$\beta(\sigma(3 + \beta + \sigma) - \rho(\sigma - \beta - 1)) > 0 \implies \sigma(3 + \beta + \sigma) > \rho(\sigma - \beta - 1) \implies \rho < \frac{\sigma(3 + \beta + \sigma)}{(\sigma - \beta - 1)}$$

Notons $\rho^* = \frac{\sigma(3 + \beta + \sigma)}{(\sigma - \beta - 1)}$. Vérifions que $a > 0$ lorsque $\rho > \rho^*$ (en supposant $\sigma - \beta - 1 > 0$ pour que cette borne soit bien définie). On aurait :

$$\begin{aligned}
& 8a^3 + a^2(8(1 + \beta + \sigma)) + a(2(\beta\sigma + (1 + \beta + \sigma)^2)) + \beta\sigma(3 + \beta + \sigma) \\
& = \rho(\beta(\sigma - \beta - 1) - 2a\beta) \implies \\
& 8a^3 + a^2(8(1 + \beta + \sigma)) + a(2(\beta\sigma + (1 + \beta + \sigma)^2)) + \beta\sigma(3 + \beta + \sigma) \\
& > \frac{\sigma(3 + \beta + \sigma)}{(\sigma - \beta - 1)}(\beta(\sigma - \beta - 1) - 2a\beta) \\
& = \beta\sigma(3 + \beta + \sigma) - 2a\frac{\beta\sigma(3 + \beta + \sigma)}{(\sigma - \beta - 1)} \implies \\
& 2a \left(4a^2 + a(4(1 + \beta + \sigma)) + \beta\sigma + (1 + \beta + \sigma)^2 + \frac{\beta\sigma(3 + \beta + \sigma)}{(\sigma - \beta - 1)} \right) > 0 \implies \\
& 2a \left((2a + 1 + \beta + \sigma)^2 + \beta\sigma + \frac{\beta\sigma(3 + \beta + \sigma)}{(\sigma - \beta - 1)} \right) > 0 \implies a > 0
\end{aligned}$$

car $(2a + 1 + \beta + \sigma)^2 + \beta\sigma + \frac{\beta\sigma(3 + \beta + \sigma)}{(\sigma - \beta - 1)} > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. On conclut que $C_{\pm}$ sont instables pour $\rho > \rho^*$.

Les résultats de cette section se résument dans le théorème suivant :

Théorème 5 (Stabilité de (SL)). *Si $\rho < 1$, alors (SL) possède un unique point d'équilibre $(0,0,0)$, qui est stable. Si $1 < \rho < \frac{\sigma(3+\beta+\sigma)}{(\sigma-\beta-1)}$, alors (SL) possède un point d'équilibre instable $(0,0,0)$ et deux points d'équilibre stables $C_{\pm}$.*

Remarque 1. *Nous n'avons pas établi que $1 < \rho < \rho^*$ est une condition nécessaire à la stabilité de $C_{\pm}$. Autrement dit, nous n'avons pas montré que la stabilité de $C_{\pm}$ implique $\rho < \rho^*$. Cela dépend de la relation entre ρ^* et les racines du discriminant Δ , dont le calcul explicite est difficile. En revanche, $\rho < 1$ est bien une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de l'origine.*

4 Bifurcations

On a montré précédemment les différents points d'équilibre et leur stabilité en fonction de la valeur de ρ : l'origine stable pour $\rho < 1$ puis l'apparition de C_+ et C_- à partir de $\rho = 1$ stables jusqu'à $\rho_c = \frac{\sigma(\beta+\sigma+3)}{\sigma-\beta-1}$. Ces changements majeurs dans l'organisation du système en fonction des valeurs du paramètre ρ sont précisément ce que l'on appelle des bifurcations. On en distingue plusieurs types, ici on a d'abord celle à $\rho = 1$ qui est en fourche puis celle à ρ_c qui est une bifurcation de Hopf.

4.1 Bifurcation en fourche (Pitchfork)

À $\rho = 1$ on observe une bifurcation en fourche à l'origine qui se caractérise par le fait qu'un point d'équilibre stable se déstabilise pour donner naissance à deux nouveaux points d'équilibres. On distingue le cas supercritique et sous-critique, dans le système de Lorenz les nouveaux points $C_{\pm}$ sont stables c'est donc supercritique. L'équation normale pour le cas supercritique est donnée par :

$$\dot{x} = cx - x^3 \quad (4.1)$$

où c est le paramètre de contrôle.

- Si $c < 0$: L'origine est l'unique point d'équilibre et il est stable.
- Si $c > 0$: L'origine devient instable et deux points stables apparaissent en $x = \pm\sqrt{c}$.

Pour identifier si notre équation est équivalente à cette forme normale nous aurons besoin de deux théorèmes :

Théorème 6 (Critères de Taylor). *Soit $\dot{x} = f(x, c)$, supposons que cette équation possède un point d'équilibre non hyperbolique en $x = 0, c = 0$, vérifiant $f(0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) \neq 0, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$.*

Alors au voisinage de $(0, 0)$ l'équation est topologiquement équivalente à la forme normale suivante :

$$\dot{x} = x(\pm c \pm x^2) \quad (4.2)$$

ce qui donne lieu à la bifurcation en fourche.

Démonstration. On fait le développement limité de $f(x, c)$:

$$\begin{aligned} f(x, c) = & f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial c}(0, 0)c + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{xc}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) \\ & + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial c^2}(0, 0) + \frac{x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) + \mathcal{O}(\|(x, c)\|^3) \end{aligned}$$

On réduit l'équation avec nos conditions :

$$\begin{aligned} f(x, c) = & \frac{xc}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial c^2}(0, 0) + \frac{x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \\ & + \mathcal{O}(\|(x, c)\|^3) \end{aligned}$$

Il nous reste encore le terme en c^2 mais dans la forme normale $x = \pm\sqrt{c}$ est solution donc $c^2 \sim x^4$, ce qui est négligeable face à x^3 car x petit on obtient donc bien une équation équivalente à (4.2). □

Théorème 7 (Variété centrale). *Soit $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f régulière, $f(0) = 0$, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de la jacobienne. On suppose $n_0 \neq 0$ (nombre de valeurs propres dont la partie réelle est nulle). Soit T_c le sous-espace vectoriel correspondant aux valeurs propres dont la partie réelle est nulle.*

Alors il existe une sous variété W^c , régulière de dimension n_0 définie sur un voisinage de 0 tangente à T_c à l'origine

On peut écrire le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + g(x, y) \\ \dot{y} = By + h(x, y) \\ x \in \mathbb{R}^{n_0}, y \in \mathbb{R}^{n-n_0} \end{cases}$$

A a toutes ses valeurs propres de partie réelle nulle, B n'en a que des négatives, g et h sont régulières, W^c peut être représentée localement comme le graphe d'une fonction régulière

$$W^c = \{(x, y) : y = Y(x)\}, Y : \mathbb{R}^{n_0} \rightarrow \mathbb{R}^{n-n_0}, Y(x) = \mathcal{O}(\|x\|^2)$$

Enfin, on peut réduire le système qui est localement équivalent au voisinage de l'origine à :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + g(x, Y(x)) \\ \dot{y} = By \end{cases}$$

Pour un temps assez grand, le comportement du système complet est décrit par celui du réduit.

4.1.1 Application au système de Lorenz

Maintenant que nous avons vu les théorèmes généraux, nous allons les appliquer car notre système possède trois équations or il nous faut le réduire à une pour retrouver la forme normale et montrer la bifurcation en fourche supercritique.

Le système linéarisé à l'origine pour $\rho = 1$ nous donne la matrice :

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

qui a pour valeurs propres $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\sigma - 1, \lambda_3 = -\beta$ et pour vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\sigma \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On effectue un changement de base pour diagonaliser la matrice jacobienne. Cela permet de découpler la variable centrale u des variables stables v et z , on pose :

$$u = \frac{x + \sigma y}{\sigma + 1}, v = \frac{x - y}{\sigma + 1}$$

de sorte que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\sigma \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le système de Lorenz s'écrit alors en posant $\rho = 1 + \epsilon$:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{\sigma+1}(\dot{x} + \sigma\dot{y}) = \frac{\sigma}{\sigma+1}(u + \sigma v)(\epsilon - z) \\ \dot{v} = \frac{1}{\sigma+1}(\dot{x} - \dot{y}) = -(\sigma + 1)v - \frac{1}{\sigma+1}(u + \sigma v)(\epsilon - z) \\ \dot{z} = -\beta z + (u + \sigma v)(u - v) \end{cases} \quad (4.3)$$

Notre système linéarisé en $(0,0,0)$ et $\rho = 1$ est donc :

$$\begin{cases} \dot{u} = 0 \\ \dot{v} = -(\sigma + 1)v \\ \dot{z} = -\beta z \end{cases}$$

On va maintenant pouvoir appliquer le théorème de variété centrale : u est la variable centrale (associée à la valeur propre de partie réelle nulle), v et z sont stables (valeurs propres de partie réelle strictement négative) donc d'après le théorème on peut exprimer v et z comme des fonctions en u et ϵ : $v(t) = h(u(t), \epsilon)$, $z(t) = g(u(t), \epsilon)$. On a :

$$\dot{z} = \dot{u} \frac{\partial g}{\partial u}(u, \epsilon)$$

On remplace $\dot{z}$ et $\dot{u}$ par leurs expressions dans (4.3)

$$-\beta z + (u + \sigma v)(u - v) = \frac{\sigma}{\sigma + 1}(u + \sigma v)(\epsilon - z) \frac{\partial g}{\partial u}(u, \epsilon)$$

On peut substituer v et z par leurs fonctions en u et ϵ :

$$-\beta g(u, \epsilon) + (u + \sigma h(u, \epsilon))(u - h(u, \epsilon)) = \frac{\sigma}{\sigma + 1}(u + \sigma h(u, \epsilon))(\epsilon - g(u, \epsilon)) \frac{\partial g}{\partial u}(u, \epsilon) \quad (4.4)$$

De même pour $v(t) = h(u(t), \epsilon)$ on obtient :

$$-(\sigma + 1)h(u, \epsilon) - \frac{1}{\sigma + 1}(u + \sigma h(u, \epsilon))(\epsilon - g(u, \epsilon)) = \frac{\sigma}{\sigma + 1}(u + \sigma h(u, \epsilon))(\epsilon - g(u, \epsilon)) \frac{\partial h}{\partial u}(u, \epsilon) \quad (4.5)$$

On suppose maintenant que h et g sont telles que : $h(0, 0) = g(0, 0) = 0$, $dh(0, 0) = dg(0, 0) = 0$. Avec un développement de Taylor on a que h et g sont de la forme :

$$\begin{cases} h(u, \epsilon) = au^2 + bu\epsilon + c\epsilon^2 + \mathcal{O}(\|(x, \epsilon)\|^3) \\ g(u, \epsilon) = du^2 + eu\epsilon + f\epsilon^2 + \mathcal{O}(\|(x, \epsilon)\|^3) \end{cases}$$

Pour obtenir g pour u et ϵ dans un voisinage de 0, on utilise (4.4) : À gauche on a du βg et du u^2 (les autres termes sont d'ordre 3 donc négligeables) à droite tout est négligeable on a :

$$-\beta g(u, \epsilon) + u^2 = \mathcal{O}(\|(u, \epsilon)\|^3), g(u, \epsilon) = \frac{u^2}{\beta} + \mathcal{O}(\|(u, \epsilon)\|^3)$$

Pour h on substitue dans (4.5) :

$$-(\sigma+1)h(u, \epsilon) - \frac{1}{\sigma+1}u\epsilon = \mathcal{O}(\|(u, \epsilon)\|^3), h(u, \epsilon) = -\frac{1}{(\sigma+1)^2}u\epsilon + \mathcal{O}(\|(u, \epsilon)\|^3)$$

On peut alors injecter h et g dans $\dot{u}$ dans (4.3) :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\sigma}{\sigma+1} \left(u - \frac{\sigma}{(\sigma+1)^2} u\epsilon + \mathcal{O}(\|(u, \epsilon)\|^3) \right) \left(\epsilon - \frac{u^2}{\beta} + \mathcal{O}(\|(u, \epsilon)\|^3) \right) \\ \dot{u} &= \frac{\sigma}{\sigma+1} u \left(\epsilon - \frac{u^2}{\beta} - \frac{\sigma\epsilon^2}{(\sigma+1)^2} \right) + \mathcal{O}(\|(u, \epsilon)\|^4) \end{aligned}$$

On réduit l'équation, ϵ étant petit on fait disparaître le terme en ϵ^2 et le $\mathcal{O}$ qui tend également rapidement vers 0, on obtient finalement :

$$\dot{u} = \frac{\sigma}{\sigma+1} u \left(\epsilon - \frac{u^2}{\beta} \right)$$

On remarque que l'on retrouve bien la forme normale (4.1) d'une bifurcation en fourche supercritique grâce au signe négatif de la constante devant le u^3 .

4.2 Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf est une transition où un point d'équilibre perd sa stabilité au profit d'une oscillation, apparaissant quand les valeurs propres du système franchissent l'axe imaginaire du plan complexe. Sa forme canonique est :

$$\dot{z} = z((\mu + i\omega) + b|z|^2)$$

Où z et b sont complexes et μ est un paramètre réel. Posons $b = \alpha + i\beta$, α est appelé premier exposant de Lyapunov si il est positif (ce qui est le cas pour Lorenz) le cycle limite est instable pour $\lambda < 0$ et la bifurcation est sous-critique. Le système "saute" vers le chaos à la place de rester sur un cercle.

Pour mieux visualiser nous pouvons passer en coordonnées polaires pour isoler l'amplitude de l'oscillation r et la phase θ en posant $z = re^{i\theta}$ et en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu r + \beta r^2) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

On reconnait la structure d'une bifurcation en fourche pour le rayon r , on a donc une bifurcation en fourche "tournante".

À l'instant de la bifurcation ($\rho = \rho_c$), on a $X_1 = -a$ avec a un réel positif et $X_{2,3} = i\omega$ on obtient donc un polynome de la forme :

$$P(X) = (X + a)(X^2 + \omega^2) = X^3 + aX^2 + \omega^2X + a\omega$$

en identifiant avec le polynôme caractéristique du système on a :

$$\begin{cases} a = \beta + \sigma + 1 \\ \omega^2 = \beta(\sigma + \rho) \\ r\omega^2 = 2\sigma\beta(\rho - 1) \end{cases}$$

Et donc :

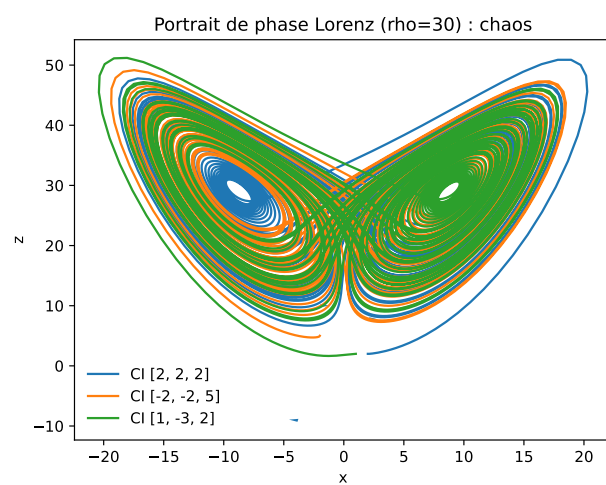
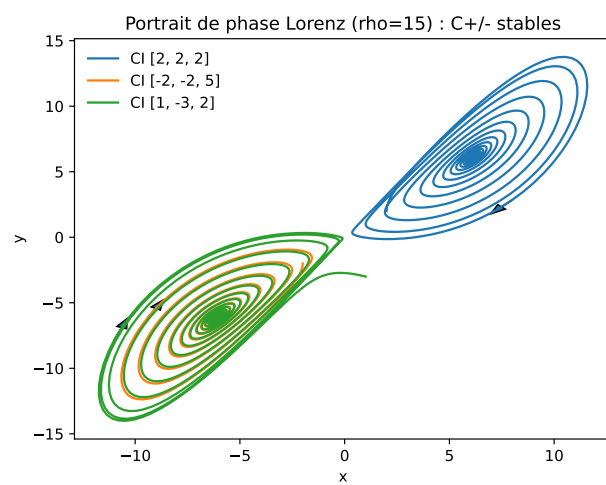
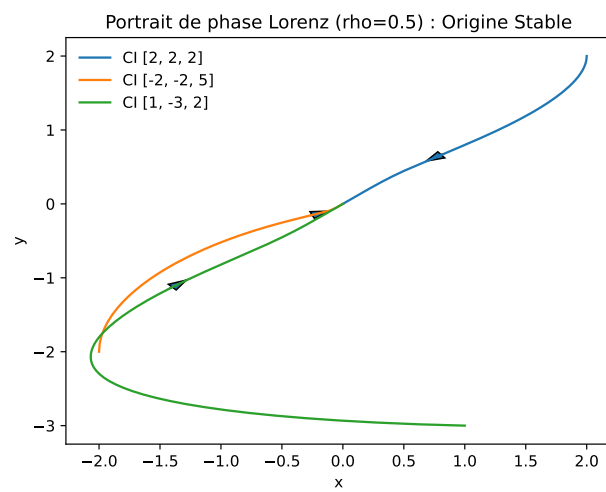
$$\omega = \sqrt{\beta(\sigma + \rho)} = \sqrt{\frac{2\beta\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - \beta - 1}}$$

Pour que ω existe on doit avoir $\sigma > \beta + 1$, ω représente la viscosité, on peut donc interpréter physiquement que le chaos ne peut pas se produire si le fluide n'est pas assez visqueux.

L'étude complète de cette bifurcation n'est malheureusement pas réalisable avec nos outils mathématiques car la réduction centrale nous permettant de passer de la 3D à la 2D demande des calculs extrêmement lourds.

4.3 Portraits de phase sur python

Pour nous permettre de mieux visualiser les phases du système en fonction de ρ nous avons réalisé des portraits de phase en 2D pour trois valeurs de ρ pour illustrer les trois régimes, avec le choix du plan (x, y) pour les deux premiers portraits dû au rôle stabilisateur de l'axe z , puis (x, z) pour mettre en évidence la symétrie du système pour le dernier.



4.3.1 Code

```
# coding: Utf8

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def lorenz(var, t, sigma, rho, beta):
    x, y, z = var
    dx_dt = sigma * (y - x)
    dy_dt = rho * x - y - x * z
    dz_dt = x * y - beta * z
    return [dx_dt, dy_dt, dz_dt]

sigma = 10.0
beta = 8/3
rho = 0.5
t = np.linspace(0, 20, 2000)
var_initiales = [[2, 2, 2], [-2, -2, 5], [1, -3, 2]]

for v0 in var_initiales:
    sol = odeint(lorenz, v0, t, args=(sigma, rho, beta))
    plt.plot(sol[:, 0], sol[:, 1], label=f"CI_{v0}")
    plt.arrow(sol[50, 0], sol[50, 1], sol[51, 0] - sol[50, 0],
              sol[51, 1] - sol[50, 1], head_width=0.1)

plt.title("Portrait_de_phase_Lorenz_(rho=0.5)_:_Origine_Stable")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.legend(frameon=False)
plt.savefig('pdp1.pdf', bbox_inches='tight', transparent=True)
plt.show()
```

5 Existence de l'Attracteur de Lorenz

5.1 Idée de preuve

Un attracteur est un ensemble d'états vers lequel les trajectoires d'un système convergent en long terme en l'absence de perturbations. En 1963, dans son célèbre papier, Lorenz conjecture qu'il existe un attracteur étrange pour son système d'équations, c'est-à-dire un attracteur possédant une structure fractale. Mais ce n'est qu'à la fin du siècle qu'il sera démontré formellement ; dans les années 70, Guckenheimer et Williams introduisent un modèle géométrique simplifié décrivant les dynamiques du flot, et en 1999 Tucker démontre que ce système simplifié donne une description précise des dynamiques du système de Lorenz. Nous allons donc montrer ici que ce système simplifié est en effet un attracteur.

Avant de commencer la preuve nous avons besoins de deux définitions clés :

Définition. Soit $X' = F(X)$ un système d'équations différentielles dans $\mathbb{R}^n$ de flot φ_t . Un ensemble $\mathcal{A}$ est appelé un attracteur si :

1. $\mathcal{A}$ est compact et invariant.
2. Il existe un ouvert U contenant $\mathcal{A}$ tel que, pour tout $X \in U$, on a $\varphi_t(X) \in U$ et

$$\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(U) = \mathcal{A}.$$

Définition. Soit $X' = F(X)$ un système dynamique différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et soit φ_t son flot. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension $n - 1$, transverse au flot φ_t .

On suppose que, pour tout point x dans un ouvert $U \subset \Sigma$, la trajectoire positive issue de x recoupe Σ en un temps $T(x) > 0$ minimal.

On définit alors l'*application de Poincaré*

$$P : U \rightarrow \Sigma$$

par

$$P(x) = \varphi_{T(x)}(x),$$

où $T(x)$ est le premier temps de retour de la trajectoire issue de x sur Σ .

L'application P est bien définie dès que les trajectoires considérées intersectent Σ de manière transversale et reviennent dans un temps fini.

5.2 Modèle simplifié

Nous supposons que notre modèle est symétrique par la réflexion $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$, comme le système de Lorenz. Nous plaçons d'abord un point d'équilibre à l'origine dans $\mathbb{R}^3$ et supposons que, dans le cube

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|, |y|, |z| \leq 5\}.$$

le système est linéaire. Plutôt que d'utiliser les valeurs propres λ_1 et $\lambda_{\pm}$ du système de Lorenz réel, nous simplifions légèrement les calculs en supposant que les valeurs propres sont -1 , 2 et -3 , et que le système est donné dans le cube par

$$\begin{cases} x' = -3x \\ y' = 2y \\ z' = -z \end{cases}$$

Nous devons comprendre comment les solutions transitent au voisinage de $(0, 0, 0)$. On pose :

$$R_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, |x| \leq 1, 0 < y \leq \varepsilon < 1\}$$

$$R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1, |x| \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

Lorsque le temps augmente, toutes les solutions qui partent de R_1 atteignent finalement le rectangle R_2 dans le plan $y = 1$. On obtient ainsi une fonction $h : R_1 \rightarrow R_2$ définie en suivant les trajectoires des solutions lorsqu'elles passent de R_1 à R_2 . On admet que cette fonction est de la forme

$$h \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^{3/2} \\ y^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que h envoie les droites $y = c$ de R_1 sur les droites $z = c^{1/2}$ dans R_2 . De plus, comme $x_1 = xz_1^3$, on voit que h envoie les droites $x = c$ sur des courbes de la forme $x_1 = cz_1^3$.

En imitant le système de Lorenz, nous plaçons deux équilibres supplémentaires dans le plan $z = 27$, l'un en $Q_- = (-10, -20, 27)$ et l'autre en $Q_+ = (10, 20, 27)$. Nous supposons que les droites données par $y = \pm 20$, $z = 27$ constituent des portions des variétés stables en $Q_{\pm}$, et que les deux autres valeurs propres en ces points sont complexes avec des parties réelles positives.

Soit

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 27, |x|, |y| \leq 20\}.$$

Nous supposons que le champ de vecteurs est dirigé vers le bas à l'intérieur de ce carré. Ainsi, les solutions s'enroulent en spirale en s'éloignant de $Q_{\pm}$ de la même manière que dans le système de Lorenz. Nous supposons également que la surface stable de $(0, 0, 0)$ rencontre Σ pour la première fois suivant la droite d'intersection du plan xz avec Σ .

Soient $\zeta_{\pm}$ les deux branches de la courbe instable à l'origine. Nous supposons que ces courbes effectuent un passage autour de Σ , puis entrent dans ce carré. Nous notons par $\rho_{\pm} = (\pm x^*, \mp y^*)$ les premiers points d'intersection de $\zeta_{\pm}$ avec Σ .

Considérons maintenant une droite $y = \nu$ dans Σ . Si $\nu = 0$, toutes les solutions issues de points de cette droite tendent vers l'origine lorsque le temps avance. Ainsi, ces solutions ne retournent jamais dans Σ . Nous supposons que toutes les autres solutions issues de Σ y reviennent lorsque le temps avance. La manière dont ces solutions reviennent conduit à nos hypothèses principales sur ce modèle. Ces hypothèses sont les suivantes :

1. **Condition de retour** : Soient $\Sigma^+ = \Sigma \cap \{y > 0\}$ et $\Sigma^- = \Sigma \cap \{y < 0\}$. Nous supposons que les solutions passant par tout point de $\Sigma^{\pm}$ reviennent dans Σ en temps positif. On obtient ainsi une application de Poincaré $P : \Sigma^+ \cup \Sigma^- \rightarrow \Sigma$. Par symétrie, on a

$$P(x, y) = -P(-x, -y).$$

2. **Direction contractante** : Pour chaque $\nu \neq 0$, nous supposons que P envoie la droite $y = \nu$ de Σ sur la droite $y = g(\nu)$ pour une certaine fonction g . De plus, nous supposons que P contracte cette droite dans la direction x .
3. **Direction d'expansion** : Nous supposons que P étire Σ^+ et Σ^- dans la direction y par un facteur supérieur à $\sqrt{2}$, de sorte que $g'(y) > \sqrt{2}$.
4. **Condition d'hyperbolicité** : En plus des effets d'expansion et de contraction, nous supposons que la différentielle de P , noté DP envoie les vecteurs tangents à $\Sigma^{\pm}$ ayant des pentes égales à ± 1 sur des vecteurs dont la pente a une valeur absolue strictement supérieure à $\mu > 1$.

Analytiquement, ces hypothèses impliquent que l'application P est de la forme

$$P(x, y) = (f(x, y), g(y)),$$

où $g'(y) > \sqrt{2}$ et $0 < \frac{\partial f}{\partial x} < c < 1$. La condition d'hyperbolicité implique que

$$g'(y) > \mu \left| \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial f}{\partial y} \right|.$$

Géométriquement, cette condition signifie que les secteurs dans les plans tangents définis par $|y| \geq |x|$ sont envoyés par DP strictement à l'intérieur de secteurs de pentes plus fortes. Notons que cette condition est vérifiée si $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$ et c sont suffisamment petits sur $\Sigma^\pm$.

Techniquement, $P(x, 0)$ n'est pas défini, mais on a

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} P(x, y) = \rho_\pm,$$

où l'on rappelle que $\rho_\pm$ est le premier point d'intersection de $\zeta_\pm$ avec Σ . Nous appelons $\rho_\pm$ la pointe de $P(\Sigma^\pm)$. En fait, nos hypothèses sur les valeurs propres garantissent que $g'(y) \rightarrow \infty$ lorsque $y \rightarrow 0$.

Pour déterminer l'attracteur, nous pouvons restreindre notre attention au rectangle $R \subset \Sigma$ défini par $|y| \leq y^*$, où l'on rappelle que $\mp y^*$ est la coordonnée en y des pointes $\rho_\pm$. Posons $R^\pm = R \cap \Sigma^\pm$. Il est facile de vérifier que toute solution partant de l'intérieur de $\Sigma^\pm$ mais en dehors de R finit par rencontrer R , de sorte qu'il suffit d'étudier le comportement de P sur R . Notons que $P(R) \subset R$.

Soit P^n la n -ième itérée de P , et posons

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} P^n(R),$$

où $\overline{U}$ désigne l'adhérence de l'ensemble U . L'ensemble A sera l'intersection de l'attracteur du flot avec R . Plus précisément, posons

$$\mathcal{A} = \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi_t(A) \right) \cup \{(0, 0, 0)\}.$$

Nous ajoutons ici l'origine afin que $\mathcal{A}$ soit un ensemble fermé. Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 8. *$\mathcal{A}$ est un attracteur pour le modèle du système de Lorenz.*

Preuve :

1. La preuve que $\mathcal{A}$ est un attracteur pour le flot découle immédiatement du fait que A est un attracteur pour l'application P (où la définition d'un attracteur pour une application est entièrement analogue à celle pour un flot). Clairement, A est fermé.

Techniquement, A n'est pas lui-même invariant par P puisque P n'est pas défini le long de $y = 0$. Cependant, pour le flot, les solutions issues de tous ces points appartiennent bien à $\mathcal{A}$, et ainsi $\mathcal{A}$ est invariant.

2. Si l'on note O l'ensemble ouvert défini par $|x| < 20$, $|y| < 20 - \varepsilon$, pour un ε tel que $y^* < 20 - \varepsilon$, alors pour tout $(x, y) \in O$, il existe un entier n tel que

$$P^n(x, y) \in R.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) \subset A$$

pour tout $(x, y) \in O$. Par définition, $A = \bigcap_{n \geq 0} P^n(R)$, et donc $A = \bigcap_{n \geq 0} P^n(O)$ également. Par conséquent, les conditions (1) et (2) de la définition d'un attracteur sont vérifiées pour P .

6 Analyse numérique et modélisation du système de Lorenz

Dans cette section, nous allons modéliser le système de Lorenz avec deux méthodes différentes se basant sur des schémas numériques. Nous allons également utiliser ces schémas pour visualiser la bifurcation de Hopf.

6.1 Méthode d'Euler Explicite

La méthode Euler Explicite est une méthode numérique cherchant à résoudre par approximation des équations différentielles du premier ordre. Cela consiste à construire des valeurs intermédiaires avec la formule suivante : $y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i)f(x_i, y_i), i \in 0, n - 1..$ Ici, nous effectuons la méthode d'Euler Explicite sur les 3 coordonnées x,y,z car nous avons un système d'équation différentielle. Ceci est donc la trajectoire obtenue en modélisant le système de Lorenz à l'aide de de la méthode schéma d'Euler Explicite.

Attracteur de Lorenz (Méthode d'Euler explicite)

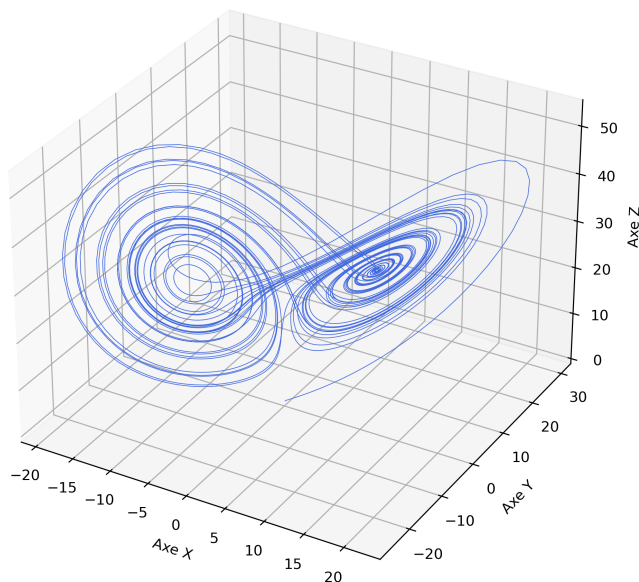


FIGURE 1 – Trajectoire obtenue par la méthode d'Euler explicite.

6.2 Méthode de Runge-Kutta (Ordre 4)

La méthode de Runge-Kutta cherche à approximer les solutions de problème de Cauchy, cette méthode a été créée en 1901 par les mathématiciens Carl Runge et Martin Wilhelm Kutta. Ici, c'est la méthode Runge-Kutta 4 (RK4) que nous avons utilisée, elle se définit de la façon suivante pour un problème de Cauchy $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n), \\
k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right), \\
k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right), \\
k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3), \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
\end{aligned}$$

Or le système de Lorenz ne dépend pas explicitement d'un temps t , on peut poser $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ x(\rho - z) - y \\ xy - \beta z \end{pmatrix}$. Nous avons ainsi la trajectoire obtenue en modélisant le système de Lorenz à l'aide de la Méthode de Runge-Kutta 4.

Attracteur de Lorenz (Méthode Runge-Kutta)

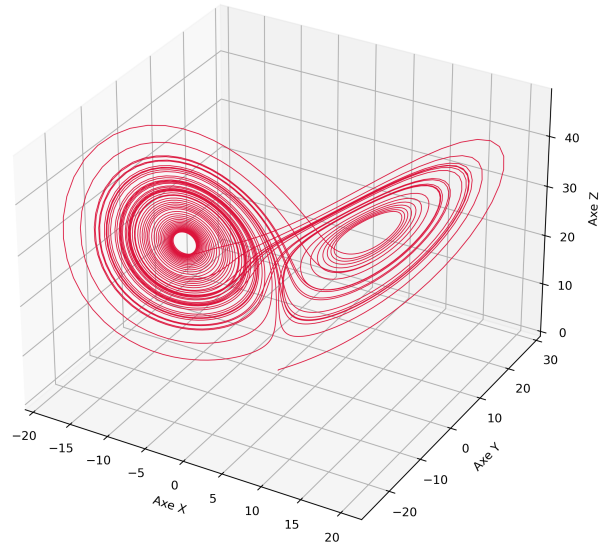


FIGURE 2 – Trajectoire obtenue par la méthode RK4.

6.3 Comparaison et Erreur

Les graphiques ci-dessous montrent les différences absolues $|X_{Euler} - X_{RK4}|$, $|Y_{Euler} - Y_{RK4}|$, $|Z_{Euler} - Z_{RK4}|$ sur une échelle logarithmique.

Évolution de la différence entre Euler et RK (Échelle Log)

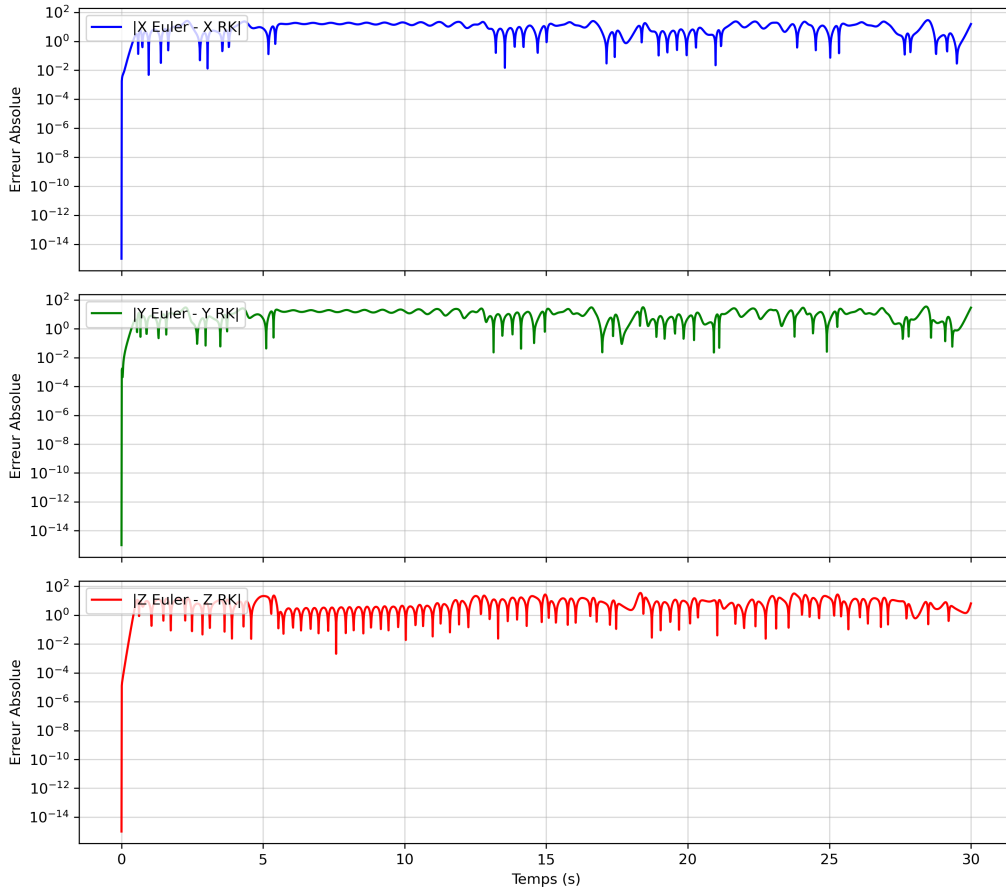


FIGURE 3 – Évolution de l'erreur entre Euler et RK4 en fonction du temps.

L'écart entre les deux méthodes croît de manière exponentielle par rapport à toutes les variables, ce qui est caractéristique de la sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques. Cette différence s'explique par

la différence d'ordre entre les deux méthodes utilisées, la méthode Runge-Kutta 4 nous donne une plus grande précision car elle est d'ordre 4.

6.4 Visualisation de la bifurcation de Hopf avec la méthode de Runge-Kutta 4

Nous allons maintenant brièvement nous intéresser à l'utilisation de la méthode de Runge-Kutta 4 afin de modéliser et visualiser la bifurcation de Hopf. Pour $\sigma = 10$ et $\beta = 8/3$, la bifurcation de Hopf se situe à $\rho \approx 24,74$. Pour visualiser cette bifurcation, nous allons donc ajuster la valeur de ρ à 24 puis 25.

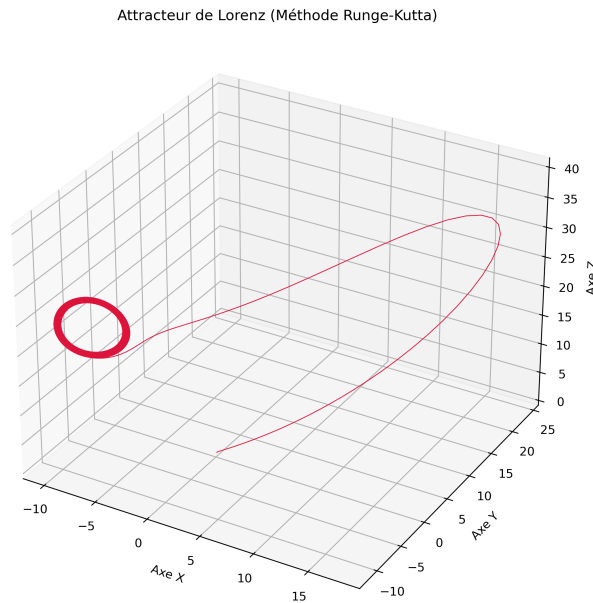


FIGURE 4 – Trajectoire obtenue par la méthode RK4 avec $\rho = 24$.

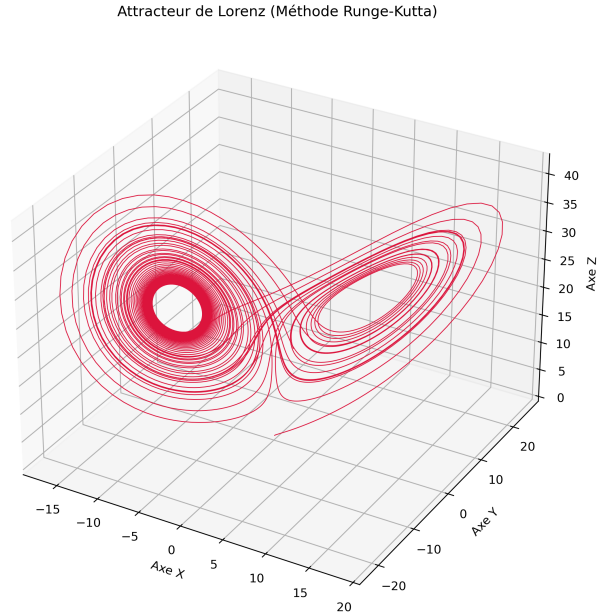


FIGURE 5 – Trajectoire obtenue par la méthode RK4 avec $\rho = 25$.

Pour $\rho = 24$, on a un système avec deux points d'équilibres qui sont stables, mais pour $\rho = 25$, on reconnaît la forme de papillon de l'attracteur de Lorenz avec deux points d'équilibres instables. La précision de la méthode Runge Kutta 4 permet ici de capturer fidèlement la complexité du système sans accumuler d'erreurs numériques trop importantes sur le long terme.

7 Programmation

7.1 Le logiciel et les bibliothèques utilisées

Pour les modélisations numériques, nous avons codé en python 3.13 sur le logiciel JupyterLab. Nous avons utilisé la bibliothèque matplotlib.pyplot afin de tracer les graphes et on a eu recours à la bibliothèque numpy pour créer des listes plus facilement.

7.2 Les codes

Le code pour modéliser le système de Lorenz avec la méthode d'Euler explicite et la méthode de Runge Kutta 4.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

sigma = 10
rho = 28
beta = 8/3

dt = 0.01
t_max = 50
N = int(t_max / dt)

xE = np.zeros(N + 1)
yE = np.zeros(N + 1)
zE = np.zeros(N + 1)

xE[0], yE[0], zE[0] = (0.1, 0.0, 0.0)

for i in range(N):
    dxdt = sigma * (yE[i] - xE[i])
    dydt = xE[i] * (rho - zE[i]) - yE[i]
    dzdt = xE[i] * yE[i] - beta * zE[i]

    xE[i+1] = xE[i] + dxdt * dt
    yE[i+1] = yE[i] + dydt * dt
    zE[i+1] = zE[i] + dzdt * dt

fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(xE, yE, zE, lw=0.5, color='royalblue')
ax.set_title("Attracteur de Lorenz (Méthode d'Euler explicite)")
ax.set_xlabel("Axe X")
ax.set_ylabel("Axe Y")
ax.set_zlabel("Axe Z")
plt.savefig('lorenz_euler.png', dpi=300)
```

```

plt.close()
plt.show()

def système_Lorenz(state, sigma, rho, beta):
    x, y, z = state
    dxdt = sigma * (y - x)
    dydt = x * (rho - z) - y
    dzdt = x * y - beta * z
    return np.array([dxdt, dydt, dzdt])

dt = 0.01
trk_max = 50
Nrk = int(trk_max / dt)

res = np.zeros((Nrk + 1, 3))

res[0] = [0.1, 0.0, 0.0]

for i in range(Nrk):
    res2 = res[i]

    k1 = système_Lorenz(res2, sigma, rho, beta)
    k2 = système_Lorenz(res2 + (dt/2) * k1, sigma, rho, beta)
    k3 = système_Lorenz(res2 + (dt/2) * k2, sigma, rho, beta)
    k4 = système_Lorenz(res2 + dt * k3, sigma, rho, beta)

    res[i+1] = res2 + (dt / 6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)

x = res[:, 0]
y = res[:, 1]
z = res[:, 2]

fig = plt.figure(figsize=(12, 9))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

ax.plot(x, y, z, lw=0.7, color='crimson')

```

```

ax.set_title("Attracteur de Lorenz (Méthode Runge-Kutta)")
ax.set_xlabel("Axe X")
ax.set_ylabel("Axe Y")
ax.set_zlabel("Axe Z")
plt.savefig('lorenz_rk4.png', dpi=300)
plt.close()

T_max = 30
N = int(T_max / dt)
t = np.linspace(0, T_max, N + 1)
euler_res = np.zeros((N + 1, 3))
rk_res = np.zeros((N + 1, 3))

c_i = np.array([0.1, 0.0, 0.0])
euler_res[0] = c_i
rk_res[0] = c_i

for i in range(N):
    euler_res[i+1] = euler_res[i] + dt *
        système_Lorenz(euler_res[i], sigma, rho, beta)

for i in range(N):
    res2 = rk_res[i]
    k1 = système_Lorenz(res2, sigma, rho, beta)
    k2 = système_Lorenz(res2 + (dt/2) * k1, sigma, rho, beta)
    k3 = système_Lorenz(res2 + (dt/2) * k2, sigma, rho, beta)
    k4 = système_Lorenz(res2 + dt * k3, sigma, rho, beta)
    rk_res[i+1] = res2 + (dt / 6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)

diff = np.abs(euler_res - rk_res) + 1e-15

fig, axes = plt.subplots(3, 1, figsize=(10, 10), sharex=True)

labels = ['X', 'Y', 'Z']
colors = ['blue', 'green', 'red']

```

```

for i in range(3):
    axes[i].semilogy(t, diff[:, i], color=colors[i],
                     label=f'|{labels[i]}Euler - {labels[i]} RK|')
    axes[i].set_ylabel("Erreur Absolue")
    axes[i].legend(loc='upper left')
    axes[i].grid(True, which="both", ls="-", alpha=0.5)

axes[2].set_xlabel("Temps (s)")
fig.suptitle("Évolution de la différence entre Euler et RK (Échelle Log)",
             fontsize=14)

plt.tight_layout(rect=[0, 0.03, 1, 0.95])
plt.savefig('lorenz_diff.png', dpi=300)
plt.close()
plt.show()

```

Références

- [1] Robert C. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics : An Introduction for Scientists and Engineers*. 2nd edition, Oxford University Press, 2000, p. 605–618.
- [2] Claire Chavaudret. “Mathematics of chaos”. *ParisTech Review*, 2015.
- [3] Étienne Ghys and Jos Leys. “Le moulin à eau de Lorenz”. *Chaos : une aventure mathématique*, Chapitre 7, 2013.
- [4] Edward Lorenz. “Deterministic nonperiodic flow”. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2), 1963, p. 130–141.
- [5] Edward Lorenz. *Predictability : Does the flap of a butterfly’s wing in Brazil set off a tornado in Texas ?* 1972.
- [6] Warwick Tucker. “The Lorenz attractor exists”. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 328(12), 1999, p. 1197–1202.
- [7] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 2012.
- [8] Philip Hartman. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, 1964 (republished by SIAM, 2002). Chapter IX, Section 7 : "Local Homeomorphisms."

8 Annexes

8.1 Calcul de ansatz de Lorenz

Nous substituons les fonctions (5) dans (4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sigma} [(- (a^2 + \pi^2) \dot{\Xi}(t) \sin(\pi z) \sin(ax)) \\ - \frac{\partial}{\partial z} ((\pi \Xi(t) \cos(\pi z) \sin(ax)) (\pi a \Xi(t) \cos(\pi z) \cos(ax)) \\ - (a \Xi(t) \sin(\pi z) \cos(ax)) (-\pi^2 \Xi(t) \sin(\pi z) \sin(ax))) - \\ \frac{\partial}{\partial x} ((a \Xi(t) \sin(\pi z) \cos(ax)) (\pi a \Xi(t) \cos(\pi z) \cos(ax)) \\ - (\pi \Xi(t) \cos(\pi z) \sin(ax)) (-a^2 \Xi(t) \sin(\pi z) \sin(ax)))] \\ = -RaT_1(t) \sin(\pi z) \sin(ax) + (\pi^2 + a^2)^2 \Xi(t) \sin(\pi z) \sin(ax) \\ \dot{T}_1(t) \sin(\pi z) \cos(ax) - \dot{T}_2(t) \sin(2\pi z) - (\pi \Xi(t) \cos(\pi z) \sin(ax)) (-aT_1(t) \sin(\pi z) \sin(ax)) \\ + (a \Xi(t) \sin(\pi z) \cos(ax)) (\pi T_1(t) \cos(\pi z) \cos(ax) - 2\pi T_2(t) \cos(2\pi z)) \\ - (a \Xi(t) \sin(\pi z) \cos(ax)) \\ = -\pi^2 T_1(t) \sin(\pi z) \cos(ax) + 4\pi^2 T_2(t) \sin(2\pi z) - a^2 T_1(t) \sin(\pi z) \cos(ax) \\ \frac{1}{\sigma} [(- (a^2 + \pi^2) \dot{\Xi}(t) \sin(\pi z) \sin(ax)) \\ - a\pi^2 \Xi(t)^2 \cos(ax) \sin(ax) \frac{\partial}{\partial z} (\cos(\pi z) \cos(\pi z) + \sin(\pi z) \sin(\pi z)) - \\ a^2 \pi \Xi(t)^2 \sin(\pi z) \cos(\pi z) \frac{\partial}{\partial x} (\cos(ax) \cos(ax) + \sin(ax) \sin(ax))] \\ = -RaT_1(t) \sin(\pi z) \sin(ax) + (\pi^2 + a^2)^2 \Xi(t) \sin(\pi z) \sin(ax) \\ \sin(\pi z) \cos(ax) [\dot{T}_1(t) + (\pi^2 + a^2) T_1(t) - a \Xi(t)] \\ + \pi a T_1(t) \Xi(t) \cos(\pi z) \sin(\pi z) (\sin(ax) \sin(ax) + \cos(ax) \cos(ax)) \\ = 4\pi^2 T_2(t) \sin(2\pi z) + \dot{T}_2(t) \sin(2\pi z) + 2\pi a \Xi(t) \sin(\pi z) \cos(ax) T_2(t) \cos(2\pi z) \end{array} \right.$$

Remarquons que l'on peut appliquer les formules trigonométriques : $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et $2 \sin(\pi z) \cos(2\pi z) = \sin(2\pi z + \pi z) + \sin(\pi z - 2\pi z) = \sin(3\pi z) - \sin(\pi z)$. Après, on calcule la dérivée de fonction constante et remarquons que le terme $\sin(3\pi z)$ peut être bien ignoré car il oscille trop vite pour nos fonctions (5) - Il s'agit bien d'une projection sur deux modes de Fourier.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\sigma} (a^2 + \pi^2) \dot{\Xi}(t) \sin(\pi z) \sin(ax) \\ = -RaT_1(t) \sin(\pi z) \sin(ax) + (\pi^2 + a^2)^2 \Xi(t) \sin(\pi z) \sin(ax) \\ \sin(\pi z) \cos(ax) [\dot{T}_1(t) + (\pi^2 + a^2) T_1(t) T_1(t) - a \Xi(t)] + \pi a T_1(t) \Xi(t) \frac{1}{2} \sin(2\pi z) \\ = 4\pi^2 T_2(t) \sin(2\pi z) + \dot{T}_2(t) \sin(2\pi z) + 2\pi a \Xi(t) T_2(t) \frac{\cos(ax)}{2} [\sin(3\pi z) - \sin(\pi z)] \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sigma}(a^2 + \pi^2)\dot{\Xi}(t) \sin(\pi z) \sin(ax) \\ \quad = -RaT_1(t) \sin(\pi z) \sin(ax) + (\pi^2 + a^2)^2 \Xi(t) \sin(\pi z) \sin(ax) \\ \sin(\pi z) \cos(ax) [\dot{T}_1(t) + (\pi^2 + a^2)T_1(t) - a\Xi(t) + \pi a\Xi(t)T_2(t)] \\ \quad = \sin(2\pi z) [4\pi^2 T_2(t) + \dot{T}_2(t) - \frac{\pi a}{2} T_1(t) \Xi(t)] \end{cases}$$

Les égalités sont vrais pour tous les x et y donc on peut déduire que les coefficients près de $\sin(\pi z) \sin(ax)$, $\sin(\pi z) \cos(ax)$ et $\sin(2\pi z)$ sont nuls, ce qui nous donne un système de trois équations aux dérivées partielles.

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sigma}(a^2 + \pi^2)\dot{\Xi}(t) = -RaT_1(t) + (\pi^2 + a^2)^2 \Xi(t) \\ \dot{T}_1(t) + (\pi^2 + a^2)T_1(t) - a\Xi(t) + \pi a\Xi(t)T_2(t) = 0 \\ 4\pi^2 T_2(t) + \dot{T}_2(t) - \frac{\pi a}{2} T_1(t) \Xi(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\Xi}(t) = \frac{Ra\sigma}{(a^2 + \pi^2)} T_1(t) - \sigma(\pi^2 + a^2) \Xi(t) \\ \dot{T}_1(t) = a\Xi(t) - (\pi^2 + a^2)T_1(t) - \pi a\Xi(t)T_2(t) \\ \dot{T}_2(t) = \frac{\pi a}{2} T_1(t) \Xi(t) - 4\pi^2 T_2(t) \end{cases}$$

On applique le changement de variable $t \mapsto t' \frac{1}{(a^2 + \pi^2)}$ qui permet de simplifier par $(a^2 + \pi^2)$.

$$\begin{cases} (\pi^2 + a^2)\dot{\Xi}(t') = \frac{Ra\sigma}{(a^2 + \pi^2)} T_1(t') - \sigma(\pi^2 + a^2) \Xi(t') \\ (\pi^2 + a^2)\dot{T}_1(t') = a\Xi(t') - (\pi^2 + a^2)T_1(t') - \pi a\Xi(t')T_2(t') \\ (\pi^2 + a^2)\dot{T}_2(t') = \frac{\pi a}{2} T_1(t') \Xi(t') - 4\pi^2 T_2(t') \end{cases}$$

On change la notation $t' \mapsto t$ et on multiplie chaque ligne par un coefficient bien choisi.

$$\begin{cases} \frac{a\pi}{(\pi^2 + a^2)^2 \sqrt{2}} (\pi^2 + a^2) \dot{\Xi}(t) = \frac{a\pi}{(\pi^2 + a^2)^2 \sqrt{2}} \frac{Ra\sigma}{(a^2 + \pi^2)} T_1(t) \\ \quad - \frac{a\pi}{(\pi^2 + a^2)^2 \sqrt{2}} \sigma(\pi^2 + a^2) \Xi(t) \\ \frac{a^2 R\pi}{(\pi^2 + a^2)^4 \sqrt{2}} (\pi^2 + a^2) \dot{T}_1(t) = \frac{a^2 R\pi}{(\pi^2 + a^2)^4 \sqrt{2}} a\Xi(t) - \frac{a^2 R\pi}{(\pi^2 + a^2)^4 \sqrt{2}} (\pi^2 + a^2) T_1(t) \\ \quad - \frac{a^2 R\pi}{(\pi^2 + a^2)^4 \sqrt{2}} \pi a\Xi(t) T_2(t) \\ \frac{a^2 R\pi}{(\pi^2 + a^2)^4} (\pi^2 + a^2) \dot{T}_2(t) = \frac{a^2 R\pi}{(\pi^2 + a^2)^4} \frac{\pi a}{2} T_1(t) \Xi(t) - \frac{a^2 R\pi}{(\pi^2 + a^2)^4} 4\pi^2 T_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a\pi}{(\pi^2+a^2)\sqrt{2}} \Xi(t) \right) = \sigma \left[\left(\frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3 \sqrt{2}} T_1(t) \right) - \left(\frac{a\pi}{(\pi^2+a^2)\sqrt{2}} \Xi(t) \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3 \sqrt{2}} T_1(t) \right) = \frac{a^2 R}{(\pi^2+a^2)^3} \left(\frac{a\pi}{(\pi^2+a^2)\sqrt{2}} \Xi(t) \right) \\ \quad - \left(\frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3 \sqrt{2}} T_1(t) \right) - \left(\frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3} T_2(t) \right) \left(\frac{a\pi}{(\pi^2+a^2)\sqrt{2}} \Xi(t) \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3} T_2(t) \right) = \left(\frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3 \sqrt{2}} T_1(t) \right) \left(\frac{a\pi}{(\pi^2+a^2)\sqrt{2}} \Xi(t) \right) - \left(\frac{4\pi^2}{\pi^2+a^2} \right) \left(\frac{a^2 R \pi}{(\pi^2+a^2)^3} T_2(t) \right) \end{cases}$$

Ce qui donne notre système voulu.